

# Torsion dans un produit de courbes elliptiques

Marc Hindry\*, Nicolas Ratazzi †

18 avril 2008

---

**Résumé :** Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $K$ , le nombre de points de torsion définis sur une extension finie  $L$  est borné polynomialement en terme du degré  $[L : K]$ . Nous formulons une question suggérant l'exposant optimal dans cette borne en terme de la dimension du groupe de Mumford-Tate des sous-variétés abéliennes de  $A$  ; nous étudions le comportement par produit et répondons par l'affirmative à la question dans le cas d'un produit de courbes elliptiques.

---

**Abstract :** Let  $A$  be an abelian variety defined over a number field  $K$ , the number of torsion points rational over a finite extension  $L$  is bounded polynomially in terms of the degree  $[L : K]$ . We formulate a question suggesting the optimal exponent for this bound in terms of the dimension of the Mumford-Tate groups of the abelian subvarieties of  $A$  ; we study the behaviour under product and then give a positive answer to our question when  $A$  is the product of elliptic curves.

---

## 1 Introduction et résultats

Soit  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne, définie sur un corps de nombres  $K$ , de dimension  $g \geq 1$ . Le classique théorème de Mordell-Weil assure que le groupe  $A(K)$  des points  $K$ -rationnels de  $A$  est de type fini. Un problème naturel qui se pose alors est de comprendre le sous-groupe de torsion  $A(K)_{\text{tors}}$ . Un premier problème consiste en fait à essayer de bien appréhender le cardinal de  $A(K)_{\text{tors}}$  lorsque  $A$  et/ou  $K$  varient. Comme dans l'article [18] auquel ce papier fait suite, nous nous intéressons ici au cas où l'on fixe une variété abélienne  $A$  définie sur un corps de nombres  $K_0$  et où l'on fait varier  $K$  parmi les extensions finies de  $K_0$  ; l'objectif étant cette fois-ci d'obtenir une borne avec une dépendance explicite et, si possible, optimale en le degré  $[K : K_0]$  ou, ce qui revient au même, en le degré  $[K : \mathbb{Q}]$ . Concernant cette question, Masser [7] et [8] a montré dans le cas général que la dépendance est polynomiale en  $[K : \mathbb{Q}]$  ; plus précisément il montre l'énoncé suivant.

**Théorème 1.1 (Masser [7])** *Soit  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$ , définie sur un corps de nombres  $K_0$ , il existe une constante  $c_A$  telle que, pour toute extension finie  $K$  de  $K_0$  on a :*

$$|A(K)_{\text{tors}}| \leq c_A [K : \mathbb{Q}]^g (\log [K : \mathbb{Q}])^g.$$

Masser indique d'ailleurs que l'exposant  $g$  n'est probablement pas le meilleur possible (sauf pour le cas d'une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe). La question naturelle qui se pose est alors de savoir quel est le plus petit exposant  $\gamma(A)$  possible dans cette borne polynomiale. Dans [18], le second auteur a donné une réponse à cette question dans le cas des

---

\*hindry@math.jussieu.fr

†nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr

variétés abéliennes CM sans facteur carré (*i.e.* de la forme  $\prod A_i$ , les  $A_i/\overline{\mathbb{Q}}$  étant de type CM, deux à deux non-isogènes).

**Définition 1.2** Soit  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $K_0$ . On pose

$$\gamma(A) = \inf \{x > 0 \mid \forall F/K_0 \text{ finie, } |A(F)_{\text{tors}}| \ll [F : K_0]^x\}.$$

La notation  $\ll$  signifie qu'il existe une constante  $C$ , ne dépendant que de  $A/K_0$ , telle que l'on a  $|A(F)_{\text{tors}}| \leq C[F : K_0]^x$ . On voit facilement que l'invariant défini ci-dessus est indépendant du corps de définition  $K_0$  choisi et ne dépend en fait que de la classe d'isogénie de la variété abélienne  $A$ .

Introduisons par ailleurs un autre invariant, défini en terme de la dimension du groupe de Mumford-Tate d'une variété abélienne (la définition de ce groupe est rappelée au paragraphe 2).

Soit  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne isogène au produit  $\prod_{i=1}^n A_i^{n_i}$  où les  $A_i$  sont des variétés abéliennes simples deux à deux non-isogènes et où les  $n_i$  sont des entiers strictement positifs.

**Définition 1.3** On définit l'invariant  $\alpha(A)$  par

$$\alpha(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \frac{2 \sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{\dim \text{MT}(\prod_{i \in I} A_i)}.$$

**Question 1.4** Soit  $A/K$  est une variété abélienne sur un corps de nombres. A-t-on  $\alpha(A) = \gamma(A)$  ?

On remarquera (*cf.* la proposition 2.11 plus bas) que, sauf dans le cas d'une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe (*i.e.*  $A = A_1^n$  avec  $\dim A_1 = 1$  et  $\dim \text{MT}(A) = \dim \text{MT}(A_1) = 2$ ), l'invariant  $\alpha(A)$  est strictement plus petit que  $\dim A$ .

L'objet de la suite de cet article est de donner une réponse affirmative à la question 1.4 ci-dessus si  $A$  est un produit de courbes elliptiques. Commençons par faire une simple remarque (dont la preuve est donnée au paragraphe 3).

**Proposition 1.5** Si  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  est une variété abélienne quelconque, l'inégalité  $\gamma(A) \geq \alpha(A)$  est vraie.

Ceci étant nous pouvons énoncer notre résultat principal :

**Théorème 1.6** Si  $A = \prod_{i=1}^m E_i$  est un produit de courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , isogènes ou non, alors

$$\gamma(A) = \alpha(A).$$

De plus, si les  $E_i$  sont deux à deux non-isogènes, ce nombre vaut  $2m/(1+3m)$  si toutes les  $E_i$  sont sans multiplication complexe et  $2r/(1+r)$  si  $E_1, \dots, E_r$  sont à multiplication complexe et  $E_{r+1}, \dots, E_m$  sont sans multiplication complexe.

Notons que dans le cas d'un produit de courbes elliptiques sans facteur carré (*i.e.*  $A$  isogène à un produit  $\prod_{i=1}^m E_i$ , les  $E_i$  étant deux à deux non-isogènes) ce théorème nous donne notamment la majoration

$$\gamma(A) \leq \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } A \text{ est sans CM} \\ 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors que le résultat de Masser donnait simplement  $\gamma(A) \leq \dim A$ .

Avant de démontrer le théorème 1.6, nous faisons un certain nombre de remarques et préliminaires que nous formulons dans le contexte général des variétés abéliennes lorsque cela est possible. La partie 2 est consacrée à divers rappels et résultats concernant le groupe de Mumford-Tate et la conjecture de Mumford-Tate. Le paragraphe 4 explique quelques réductions du problème : on y montre notamment que, si  $A = \prod_{i=1}^r A_i^{n_i}$ , il suffit d'obtenir, pour  $H$  sous-groupe fini produit de

$A[\ell^\infty]$ , une borne du cardinal de  $H$  en fonction du degré de l'extension  $[K(H) : K]$ . Les paragraphes 5 et 6 sont consacrés à des arguments galoisiens permettant d'entamer le dévissage du calcul de  $\gamma(A)$ , avec  $A = \prod_{i=1}^r A_i^{n_i}$ . Nous indiquons une méthode permettant, sous certaines hypothèses sur  $A$ , de ramener le problème à une combinatoire ne faisant intervenir que la valeur des  $\gamma(A_i)$  pour les facteurs simples  $A_i$  de  $A$ . Jusqu'au paragraphe 6 compris, les arguments sont valables dans le cadre général d'un produit de variétés abéliennes. Au paragraphe 7, nous expliquons comment achever le calcul de  $\gamma(A)$  pour un produit de courbes elliptiques, utilisant la technique développée dans les paragraphes précédents, ainsi que les résultats déjà connus pour les courbes elliptiques.

## 2 Rappels sur les groupes et la conjecture de Mumford-Tate

Fixons désormais un corps de nombres  $K$  et un plongement  $K \subset \mathbb{C}$  et notons  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $A/K$  une variété abélienne. On note  $V = H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$  le premier groupe de cohomologie singulière de la variété analytique complexe  $A(\mathbb{C})$ . C'est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension  $2g$ . Il est naturellement muni d'une structure de Hodge de type  $\{(1,0), (0,1)\}$ , c'est-à-dire d'une décomposition sur  $\mathbb{C}$  de  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  donnée par  $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$  telle que  $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$  où  $\overline{\phantom{x}}$  désigne la conjugaison complexe. On note  $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{GL}_{V_{\mathbb{C}}}$  le cocaractère tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}^\times$ ,  $\mu(z)$  agit par multiplication par  $z$  sur  $V^{1,0}$  et agit trivialement sur  $V^{0,1}$ . On définit le groupe de Mumford-Tate en suivant [16].

**Définition 2.1** Le *groupe de Mumford-Tate*  $\mathrm{MT}(A)/\mathbb{Q}$  de  $A$  est le plus petit  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique  $G$  de  $\mathrm{GL}_V$  (vu comme  $\mathbb{Q}$ -schéma en groupes) tel que, après extension des scalaires à  $\mathbb{C}$ , le cocaractère  $\mu$  se factorise à travers  $G_{\mathbb{C}} := G \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ .

Concernant les groupes de Mumford-Tate  $\mathrm{MT}(A)$  l'énoncé suivant est bien connu mais nous n'avons pas trouvé de référence.

**Lemme 2.2** Soit  $\prod_{i=1}^r A_i^{n_i}/K$  une variété abélienne sur un corps de nombres  $K$  plongé dans  $\mathbb{C}$ . On a

$$\mathrm{MT}\left(\prod_{i=1}^r A_i^{n_i}\right) \simeq \mathrm{MT}\left(\prod_{i=1}^r A_i\right).$$

*Démonstration* : Remarquons par la formule de Künneth, que

$$H^1\left(\prod_{i=1}^r A_i^{n_i}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H^1(A_i(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{\oplus n_i}.$$

Posons  $V_i = H^1(A_i(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ . Vu la définition du groupe de Mumford-Tate, on voit que l'on obtient le résultat en plongeant diagonalement  $\mathrm{GL}_{V_i}$  dans  $\mathrm{GL}_{V_i^{\oplus n_i}}$  et  $\mathrm{GL}_{V_i^{\oplus n_i}}$  dans  $\mathrm{GL}_V$  avec  $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\oplus n_i}$ .  $\square$

Nous rappelons également un résultat concernant le lien entre groupe de Mumford-Tate du produit et produit des groupes de Mumford-Tate, dans le cas des courbes elliptiques. Précisément, dans ce cas, le bon objet n'est pas le groupe de Mumford-Tate, mais le groupe de Hodge :

**Définition 2.3** Le *groupe de Hodge* d'une variété abélienne  $A$ , définie sur un corps de nombres  $K$  plongé dans  $\mathbb{C}$ , est noté  $\mathrm{Hdg}(A)$  et est défini par la formule

$$\mathrm{Hdg}(A) = \mathrm{MT}(A) \cap \mathrm{SL}_V \quad \text{où} \quad V = H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}).$$

Les groupes de Mumford-Tate et de Hodge sont reliés par  $\mathrm{MT}(A) = \mathbb{G}_m \cdot \mathrm{Hdg}(A)$  où  $\cdot$  dénote le produit presque direct (*i.e.* le morphisme, donné par le produit, du produit direct  $\mathbb{G}_m \times \mathrm{Hdg}(A)$  vers  $\mathrm{MT}(A)$  est une isogénie).

**Lemme 2.4 (Imai [5])** Soit  $A = \prod_{i=1}^r E_i$  un produit de courbes elliptiques deux à deux non-isogènes, définies sur un corps de nombres  $K$  plongé dans  $\mathbb{C}$ . On a

$$\mathrm{Hdg}(A) \simeq \prod_{i=1}^r \mathrm{Hdg}(E_i).$$

Rappelons maintenant la célèbre conjecture de Mumford-Tate. Notons  $A/K$  une variété abélienne quelconque de dimension  $g \geq 1$ , définie sur un corps de nombres  $K$  que l'on suppose plongé dans  $\mathbb{C}$ . Notons également  $\mathrm{MT}(A)$  le groupe de Mumford-Tate correspondant.

**Définition 2.5** Notons  $T_\ell(A)$  le module de Tate et  $V_\ell := T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ . Soit  $\ell$  un premier et  $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \mathrm{Aut}(T_\ell(A)) \subset \mathrm{GL}(V_\ell)$  la représentation  $\ell$ -adique associée à l'action de Galois sur les points de  $\ell^\infty$ -torsion de  $A$ . On définit  $\overline{G}_\ell$  (que l'on notera aussi éventuellement  $G_{\ell,A}$  si besoin est) comme étant l'adhérence de Zariski de l'image  $G_\ell$  de  $\rho_\ell$  dans le groupe algébrique  $\mathrm{GL}_{V_\ell} \simeq \mathrm{GL}_{2g, \mathbb{Q}_\ell}$ . C'est un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}_\ell$  dont on notera  $\overline{G}_\ell^0$  la composante neutre (composante connexe de l'identité).

Les théorèmes de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique (cf. [28] XI) d'une part, et la comparaison entre le premier groupe de cohomologie étale et le module de Tate (cf. [9] 15.1 (a)) d'autre part donnent pour tout premier  $\ell$  l'isomorphisme canonique :

$$V_\ell = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Nous fixons une fois pour toute dans la suite un tel isomorphisme. Ceci permet de comparer  $\mathrm{MT}(A) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$  et  $\overline{G}_\ell^0$ . Dans le papier [12] (en partie écrit avec Tate comme l'indique Mumford en introduction), se trouve formulée la célèbre conjecture :

**Conjecture 2.1 (Mumford-Tate)** Pour tout  $\ell$  premier, on a  $\overline{G}_\ell^0 = \mathrm{MT}(A) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ .

**Définition 2.6** Notons  $\rho : \mathrm{MT}(A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_V$  la représentation naturelle du groupe de Mumford-Tate.

Un certain nombre de cas particuliers, ainsi que de résultats en direction de la conjecture précédente sont connus. Nous renvoyons à la référence [16] pour une discussion détaillée de ces résultats. Disons simplement ici que, suite aux travaux de Serre, cette conjecture est un théorème pour les produits de courbes elliptiques (cf. théorème 2.10 ci-dessous). De manière générale on sait par les travaux de Borovoi [2], Deligne [3] Exp I, 2.9, 2.11, et Pjateckiĭ-Šapiro [17] qu'une inclusion est toujours vraie :

**Théorème 2.7 (Borovoi, Deligne, Pjateckiĭ-Šapiro)** Pour tout  $\ell$  premier,  $\overline{G}_\ell^0 \subset \mathrm{MT}(A) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ .

Par ailleurs, on a le résultat suivant, dû à Serre [25] 2.2.3. (cf. également [27]), dans le cas général.

**Théorème 2.8 (Serre)** L'application

$$\varepsilon : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \overline{G}_\ell(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \overline{G}_\ell(\mathbb{Q}_\ell)/\overline{G}_\ell^0(\mathbb{Q}_\ell)$$

est continue surjective, de noyau indépendant de  $\ell$  pour tout premier  $\ell$ .

Ainsi, le noyau de  $\varepsilon$  est un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$  donc il existe une extension finie  $K'/K$  telle que  $\mathrm{Gal}(\overline{K'}/K') \subset \ker \varepsilon$ . Dit autrement, les deux théorèmes précédents donnent le lien entre la représentation  $\rho$  et les représentations  $\ell$ -adiques  $\rho_\ell$  pour tout premier  $\ell$  : quitte

à remplacer au départ  $K$  par une extension  $K'$  finie ne dépendant que de  $A$  (ce que nous ferons dans la suite), on a, pour tout premier  $\ell$ , la factorisation

$$\rho_\ell : \text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\rho} \text{GL}_V(\mathbb{Z}_\ell) \simeq \text{GL}(T_\ell(A)).$$

Ainsi, dans ce contexte la conjecture de Mumford-Tate se traduit en disant que le sous-groupe  $G_\ell$  est d'indice fini dans  $\text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell)$ . Dans [22] conjecture C.3.7.a) (ce qui est noté  $\text{Hdg}(\mathbb{Z}_\ell)$  dans cette référence est ce que nous notons ici  $\text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell)$ ), Serre a formulé une version encore plus optimiste :

**Conjecture 2.2 (Mumford-Tate, version forte)** *Pour tout  $\ell$  premier, on a  $G_\ell \subset \text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell)$ , et de plus cette inclusion est d'indice fini, borné indépendamment de  $\ell$ .*

Cette version forte de la conjecture de Mumford-Tate est démontrée dans un certain nombre de cas, notamment dans le cas des courbes elliptiques :

**Théorème 2.9 (Serre)** *Soit  $E/K$  une courbe elliptique. Pour tout  $\ell$  premier on a*

$$G_\ell = \text{Im}(\rho_\ell) \subset \text{MT}(E)(\mathbb{Z}_\ell),$$

*cette inclusion étant de conoyau fini, borné indépendamment de  $\ell$ . Si  $E$  est sans multiplication complexe, l'inclusion est même une égalité pour tout  $\ell$  assez grand (dépendant de  $E$ ).*

*Démonstration* : Dans le cas des courbes elliptiques de type CM cela découle du théorème 1 p.II-26 de [24]. Dans le cas des courbes elliptiques sans multiplication complexe il s'agit du théorème 3 p. 299 de [21].  $\square$

Mieux, Serre donne dans [21] une preuve de cette conjecture forte pour un produit de deux courbes elliptiques non-isogènes, Ribet [19] l'en déduit pour un produit de courbes elliptiques deux à deux non-isogènes sans multiplication complexe, et, dans une lettre à Masser (cf. [23]), Serre donne une preuve pour un produit de courbes elliptiques deux à deux non-isogènes à multiplication complexe. Il est alors essentiellement formel d'en déduire le résultat pour un produit de courbes elliptiques :

**Théorème 2.10** *Soient  $g \geq 1$  et  $E_1, \dots, E_g/K$  des courbes elliptiques. Posons  $A = \prod_{i=1}^g E_i$ . Pour tout  $\ell$  premier on a*

$$G_{\ell,A} = \text{Im}(\rho_\ell) \subset \text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell),$$

*cette inclusion étant de conoyau fini, borné indépendamment de  $\ell$ .*

*Démonstration* : Notons tout d'abord qu'il suffit de prouver le résultat dans le cas où les  $E_i$  sont deux à deux non-isogènes, le cas général d'un produit  $\prod_{i=1}^g E_i^{n_i}$  en découle, car par le lemme 2.2 le groupe  $\text{MT}(\prod_{i=1}^g E_i^{n_i}) = \text{MT}(\prod_{i=1}^g E_i)$  via le plongement diagonal des  $\text{GL}_{V_i}$  dans  $\text{GL}_{V_i^{\oplus n_i}}$  (notations du lemme 2.2) et il en est de même pour l'image des représentations  $\ell$ -adiques  $\rho_\ell$ . Si toutes les  $E_i$  sont à multiplications complexes, le résultat est prouvé par Serre dans [23]. Si au contraire aucune  $E_i$  n'a de multiplication complexe, le résultat est le théorème 6 de Serre [21] si  $g = 2$ , ce résultat étant étendu à  $g$  quelconque par Ribet [19] Theorem 3.5. Il reste donc à traiter le cas où au moins l'une des  $E_i$  est à multiplications complexes, sans que toutes le soit. Là encore le cas  $g = 2$  est prouvé dans [21] : il s'agit du théorème 7. La preuve donnée dans [21] pour  $g = 2$  reliée à l'argument de Ribet permettent là encore d'étendre le résultat au cas  $g$  quelconque : Écrivons le produit  $\prod_{i=1}^g E_i$  sous la forme  $B \times C$  où  $B = \prod_{i=1}^r B_i$  est un produit non-vide de courbes elliptiques sans multiplications complexes, et où  $C$  est un produit non-vide de courbes elliptiques ayant des multiplications complexes. Par la conjecture de Mumford-Tate forte pour  $B$  et  $C$ , valable par ce qui précède, on sait que l'on a

$$\text{Hdg}(B)(\mathbb{Z}_\ell) \cong \text{Gal}(K(B[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \quad \text{et de même pour } C,$$

où  $\cong$  signifie, à indice fini borné indépendamment de  $\ell$  près. Le groupe de Hodge d'un produit de courbes elliptiques étant isomorphe au produit des groupes de Hodge, on a ainsi

$$\mathrm{Hdg}(A)(\mathbb{Z}_\ell) \cong \mathrm{Gal}(K(B[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \times \mathrm{Gal}(K(C[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})).$$

Il nous suffit donc de prouver que les extensions  $K(B[\ell^\infty])$  et  $K(C[\ell^\infty])$  sont presque linéairement disjointes au dessus de  $K(\mu_{\ell^\infty})$ , *i.e.*, montrer que l'extension  $K_{B,C} := K(B[\ell^\infty]) \cap K(C[\ell^\infty])$  est finie sur  $K(\mu_{\ell^\infty})$ , de degré borné indépendamment de  $\ell$ . Nous suivons pour cela la preuve du théorème 6 de [21] : l'extension  $K_{B,C}$  est abélienne sur  $K(\mu_{\ell^\infty})$  car  $C$  est une variété abélienne de type CM. Notons  $K^{\mathrm{cycl}}$  l'extension de  $K$  engendrée par les  $K(\mu_{\ell^\infty})$  lorsque  $\ell$  varie et, pour toute variété abélienne  $X/K$ , notons  $K(X_\infty)$  l'extension de  $K$  engendrée par tous les points de torsion de  $X(\overline{K})$ .

Nous voulons montrer que  $\mathrm{Gal}(K(B_\infty)/K^{\mathrm{cycl}})$  contient  $\mathrm{Gal}(K(B_\infty)/K_{B,C})$  comme sous-groupe ouvert. Or a un indice fini près, on sait que

$$\mathrm{Gal}(K(B_\infty)/K^{\mathrm{cycl}}) = \prod_{\ell} \prod_{i=1}^r \mathrm{Hdg}(B_i)(\mathbb{Z}_\ell) \cong \prod_{\ell} \prod_{i=1}^r \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell).$$

Comme indiqué en remarque 3. du lemme 3.4 de [19], chacun des groupes  $\prod_{\ell} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$  satisfait la propriété de commutateurs exigée pour l'application du lemme 3.4 de Ribet [19] : pour tout sous groupe ouvert  $U$  de  $\prod_{\ell} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ , l'adhérence du sous-groupe des commutateurs de  $U$  est ouverte dans  $\prod_{\ell} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ . Pour pouvoir appliquer le lemme 3.4 de [19] (et ainsi conclure la preuve), nous reste donc à vérifier que la projection de  $\rho_{\ell}(\mathrm{Gal}(K(B_\infty)/K_{B,C}))$  sur chacun des double facteur  $\prod_{\ell} (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)(\mathbb{Z}_\ell)$  est ouverte. Là encore on suit l'argument de Serre :  $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$  admet  $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$  comme algèbre de Lie. Cette dernière est égale à son algèbre de Lie dérivée, donc la remarque 2 suivant le lemme 3.4 de [19] nous assure que  $\prod_{\ell} (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)(\mathbb{Z}_\ell)$  vérifie la propriété de commutateurs rappelée ci-dessus. On l'applique alors avec comme groupe  $U$ , l'image de  $\mathrm{Gal}(K(B_\infty)/K^{\mathrm{cycl}})$  dans  $\prod_{\ell} (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)(\mathbb{Z}_\ell)$ , image qui est ouverte par le théorème 6' de [21]. Ceci permet d'appliquer le lemme 3.4 de [19] et donc de conclure.  $\square$

Nous rappelons enfin, un fait indiqué dans l'introduction, sans doute bien connu des experts, mais que nous n'avons pas trouvé dans la littérature.

**Proposition 2.11** *Soit  $A$  une variété abélienne sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Le groupe de Mumford-Tate  $\mathrm{MT}(A)$  est de dimension 2 si et seulement si  $A$  est isogène à une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe.*

*Démonstration* : Dire que le groupe de Mumford-Tate de  $A$  est de dimension 2 équivaut à dire que son groupe de Hodge,  $\mathrm{Hdg}(A)$  est de dimension 1. Or tout groupe algébrique connexe de dimension 1 sur  $\mathbb{Q}$  est commutatif. Ceci entraîne (*cf.* par exemple [11] paragraphe 2, seconde proposition) que  $A$  est une variété abélienne de type CM (il s'agit même d'une propriété équivalente). Or si  $A$  est simple de type CM, on peut utiliser la borne de Ribet ([20]) :

$$\dim \mathrm{Hdg}(A) \geq 1 + \log_2(\dim A).$$

Donc si  $A$  est simple,  $\dim \mathrm{Hdg}(A) = 1$  implique que  $A$  est une courbe elliptique de type CM. Si  $A$  est isogène à un produit  $\prod_{i=1}^n A_i^{n_i}$  avec les  $A_i$  deux à deux non-isogènes, alors pour tout  $i$ ,

$$\mathrm{Hdg}(A) = \mathrm{Hdg}(A_1 \times \dots \times A_n) \twoheadrightarrow \mathrm{Hdg}(A_i).$$

Ceci entraîne que si  $\dim \mathrm{Hdg}(A) = 1$  alors les  $A_i$  sont de dimension 1, donc, en appliquant par exemple le lemme 2.4 précédent, on voit que  $\mathrm{Hdg}(A) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Hdg}(A_i)$  et donc que nécessairement  $n = 1$ . Finalement,  $A = A_1^{n_1}$  avec  $A_1$  simple de type CM et de dimension 1. Ainsi  $A$  est bien une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe. La réciproque est claire.  $\square$

Concluons ce paragraphe en indiquant des hypothèses garantissant que le groupe de Hodge d'un produit se décompose en le produit des groupes de Hodge. Notons que l'on a toujours  $\mathrm{Hdg}(A_1 \times$

$\cdots \times A_n) \subset \text{Hdg}(A_1) \times \cdots \times \text{Hdg}(A_n)$  mais que l'égalité n'est pas toujours vraie (cf. par exemple [10] paragraphes 3 et 5.3). Rappelons pour cela la notion de dimension relative :

**Définition 2.12** Soit  $A/\mathbb{C}$  une variété abélienne simple. Notons  $D = \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$  et  $E$  le centre de  $D$ . La *dimension relative* de  $A$ , notée  $\dim_{\text{rel}}(A)$ , est par définition l'entier donné par

$$\dim_{\text{rel}}(A) := \begin{cases} \frac{\dim A}{[E:\mathbb{Q}]} & \text{si } A \text{ est de type I au sens de la classification d'Albert} \\ \frac{\dim A}{2[E:\mathbb{Q}]} & \text{si } A \text{ est de type II ou III} \\ \frac{2 \dim A}{\sqrt{[D:E][E:\mathbb{Q}]}} & \text{si } A \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

**Théorème 2.13 (Ichikawa [4])** Soit  $A/\mathbb{C}$  une variété abélienne dont les sous-variétés abéliennes simples sont toutes de dimension relative impaire. Soient  $B$  et  $C$  deux variétés abéliennes telles que  $A$  est isogène à  $B \times C$  et telles que  $B$  (respectivement  $C$ ) est de type I, II ou III (respectivement IV) au sens de la classification d'Albert. Alors

$$\text{Hdg}(A) = \text{Hdg}(B) \times \text{Hdg}(C).$$

De plus, avec les notations précédentes, si  $B$  est isogène au produit  $\prod_{i=1}^r B_i^{n_i}$ , les  $B_i$  étant deux à deux non-isogènes, alors

$$\text{Hdg}(B) = \prod_{i=1}^r \text{Hdg}(B_i).$$

### 3 Preuve de la proposition 1.5

Soient  $I$  un ensemble non-vide de  $\{1, \dots, n\}$  et  $F/K_0$  une extension finie. Notons  $A_I := \prod_{i \in I} A_i^{n_i}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$|(A_I)(F)_{\text{tors}}| \leq \left| \left( \prod_{i=1}^n A_i^{n_i} \right) (F)_{\text{tors}} \right| = |A(F)_{\text{tors}}| \ll [F : K_0]^{\gamma(A) + \varepsilon}.$$

On en déduit que, pour tout tel ensemble  $I$ , on a  $\gamma(A) \geq \gamma(A_I)$ . Par ailleurs le théorème 1.4 de [18] assure que

$$\gamma(A_I) \geq \frac{2 \dim A_I}{\dim \text{MT}(A_I)} = \frac{2 \sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{\dim \text{MT}(A_I)}.$$

Or sur la définition du groupe de Mumford-Tate (voir le lemme 2.2), on voit que

$$\text{MT}(A_I) = \text{MT} \left( \prod_{i \in I} A_i^{n_i} \right) \simeq \text{MT} \left( \prod_{i \in I} A_i \right).$$

On déduit donc l'inégalité voulue.  $\square$

**Remarque 3.1** Le même argument (loc. cit.) indique en fait que, pour toute variété abélienne  $A/K$ , on a en fait  $\gamma(A) \geq \frac{2 \dim A}{d_\ell}$ , où  $d_\ell := \dim \overline{G}_\ell$ . On voit ainsi que si la conjecture de Mumford-Tate est fautive pour  $A$  et  $\ell$ , la réponse à la question 1.4 sera négative.

Notons que ce résultat est déjà suffisant pour montrer que la question naïve que l'on aurait pu poser, à savoir “a-t-on  $\gamma(A) = \frac{2 \dim A}{\dim \text{MT}(A)}$  ?” admet une réponse négative en général. En effet, il suffit pour cela de trouver un exemple de variété abélienne  $A$  telle que  $\alpha(A)$  est strictement plus grand que  $\frac{2 \dim A}{\dim \text{MT}(A)}$ . La seconde partie de la proposition suivante donne le contre-exemple recherché.

**Proposition 3.2** Soient  $n \geq 1$  un entier et  $E_1, \dots, E_n/\overline{\mathbb{Q}}$  des courbes elliptiques deux à deux non-isogènes. Posons  $A = \prod_{i=1}^n E_i$ . Si toutes les  $E_i$  sont à multiplication complexe, ou si aucune  $E_i$  est à multiplication complexe, alors

$$\alpha(A) = \frac{2 \dim A}{\dim \text{MT}(A)} = \begin{cases} \frac{2n}{1+3n} & \text{dans le cas sans multiplication complexe} \\ \frac{2n}{1+n} & \text{dans le cas avec multiplication complexe.} \end{cases}$$

Si on a  $A = \prod_{i=1}^r E_i \times \prod_{i=r+1}^n E_i$  avec  $n > r \geq 1$ , les  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  à multiplication complexe et les  $E_i$ ,  $r+1 \leq i \leq n$  sans multiplication complexe. En posant  $B = \prod_{i=1}^r E_i$ , on a

$$\alpha(A) = \frac{2 \dim B}{\dim \text{MT}(B)} = \frac{2r}{1+r} > \frac{2n}{1+r+3(n-r)} = \frac{2 \dim A}{\dim \text{MT}(A)}.$$

*Démonstration* : C'est un simple calcul, qui repose sur les faits suivants :

1. Si  $E$  est une courbe elliptique à multiplication complexe, alors  $\dim \text{MT}(E) = 2$  ;
2. si  $E$  est une courbe elliptique sans multiplication complexe, alors  $\dim \text{MT}(E) = 4$  ;
3. si  $X = \prod_{i=1}^m E_i$  est un produit de courbes elliptiques deux à deux non-isogènes, alors  $\text{Hdg}(X) \simeq \prod_{i=1}^m \text{Hdg}(E_i)$  d'après le lemme 2.4.

Ces trois points permettent aisément de conclure.  $\square$

## 4 Quelques réductions

Nous commençons par deux réductions (au cas  $\ell$ -adique et au cas d'un groupe produit) valables en toute généralité pour des variétés abéliennes quelconques.

### 4.1 Réduction au cas $\ell$ -adique

Soit  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $K$ .

**Proposition 4.1** Soit  $\alpha > 0$ . Pour démontrer que  $\gamma(A) \leq \alpha$ , il suffit de montrer que : il existe une constante strictement positive  $C(A/K)$  ne dépendant que de  $A/K$  telle que pour tout nombre premier  $\ell$ , pour tout sous-groupe fini  $H_\ell$  de  $A[\ell^\infty]$ , on a

$$\text{Card}(H_\ell) \leq C(A/K)[K(H_\ell) : K]^\alpha. \quad (1)$$

*Démonstration* : Soit  $L/K$  une extension finie. Posons

$$H = A(L)_{\text{tors}} \quad \text{et pour tout premier } \ell, \quad H_\ell = A(L)_{\text{tors}}[\ell^\infty].$$

Nous pouvons appliquer l'hypothèse de l'énoncé aux groupes  $H_\ell$  pour tout premier  $\ell$  :

$$|H_\ell| \ll [K(H_\ell) : K]^\alpha.$$

En notant  $\omega(n)$  le nombre de nombre premiers divisant  $n$ , il vient

$$|A(L)_{\text{tors}}| = |H| = \prod_{\ell} |H_\ell| \leq C(A/K)^{\omega(|A(L)_{\text{tors}}|)} \prod_{\ell} [K(H_\ell) : K]^\alpha. \quad (2)$$

Par ailleurs, une estimation classique de  $\omega(n)$  est la suivante (*cf.* par exemple [30] p. 85 § 5.3) :  $\omega(n) \ll \frac{\log n}{\log \log n}$ . En se souvenant (*confer* par exemple le théorème 1.1) que  $|A(L)_{\text{tors}}| \ll [L : K]^c$ , on en tire

$$\omega(|A(L)_{\text{tors}}|) \ll \frac{\log |A(L)_{\text{tors}}|}{\log \log |A(L)_{\text{tors}}|} \ll \frac{\log [L : K]}{\log \log [L : K]}$$



L'inégalité (2) peut donc se réécrire

$$|A(L)_{\text{tors}}| \leq C^{\frac{\log[L:K]}{\log \log[L:K]}} \prod_{\ell} [K(H_{\ell}) : K]^{\alpha}.$$

De plus un théorème de Serre (Théorème 1 de [26]) assure que les représentations  $\rho_{\ell} : G_K \rightarrow \text{Aut}(T_{\ell}(A))$  sont indépendantes (au moins quitte à être monté au départ, sur une extension finie de  $K$  ne dépendant que de  $A/K$ , ce que l'on suppose ici). Comme pour tout premier  $\ell$ ,  $H_{\ell} \subset A[\ell^{\infty}]$ , on en déduit que  $\prod_{\ell} [K(H_{\ell}) : K] \ll [K(H) : K] \leq [L : K]$  et enfin que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien :

$$|A(L)_{\text{tors}}| \leq C^{\frac{\log[L:K]}{\log \log[L:K]}} [K(H) : K]^{\alpha} \leq [L : K]^{\alpha + \varepsilon}.$$

Ceci conclut.  $\square$

## 4.2 Réduction au cas produit

Soit  $A = \prod_{i=1}^r A_i$  un produit de variétés abéliennes quelconques (isogènes ou non). Soient  $\ell$  un nombre premier et  $H$  un sous-groupe fini de  $A[\ell^{\infty}]$ . Notons  $H' = \prod_{i=1}^r \text{pr}_i(H)$  où  $\text{pr}_i : A \rightarrow A_i$  est la projection canonique. Si  $(P_1, \dots, P_r) \in H'$  alors chaque  $P_i$  est défini sur  $K(H)$  (car pour tout  $i$  entre 1 et  $r$ , il existe  $Q_j$ ,  $j \neq i$  tels que  $(Q_1, \dots, Q_{i-1}, P_i, Q_{i+1}, \dots, Q_r) \in H$ ). Or  $H \subset H'$ , donc  $K(H) = K(H')$ . Ceci permet de se ramener au cas d'un groupe produit : si  $H'$  vérifie  $|H'| \ll [K(H') : K]^{\star}$ , il en est de même, avec le même exposant  $\star$ , pour  $H$ . Ainsi dans toute la suite nous pourrions supposer que  $H$  est un sous-groupe produit. Mieux :

Si  $A = \prod_{i=1}^n A_i^{n_i}$  les  $A_i$  étant deux à deux non-isogènes sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , si  $\ell$  est un premier quelconque et si  $H = \prod_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{n_i} H_{i,j})$  où les  $H_{i,j}$  sont des sous-groupes finis de  $A_i[\ell^{\infty}]$  pour tout  $i$  et  $j$  ; posons  $L = K(H)$ , on a alors  $H \subset \prod_{i=1}^n A_i(L)_{\text{tors}}^{n_i}$ . De plus l'extension engendrée sur  $K$  par les  $A_i(L)_{\text{tors}}$  est incluse dans  $L = K(H)$ .

Ceci montre que, si  $A$  est de la forme  $\prod_{i=1}^n A_i^{n_i}$ , on peut supposer dans la suite le groupe  $H$  de  $A[\ell^{\infty}]$  de la forme  $\prod_{i=1}^n H_i^{n_i}$ , où  $H_i$  est un sous-groupe fini de  $A_i[\ell^{\infty}]$ .

## 4.3 Une réduction spécifique au cas de type CM

Supposons dans ce paragraphe que la variété abélienne  $A$  est de type CM. Soit  $\ell$  un premier et  $H \subset A[\ell^{\infty}]$  fini. L'extension  $K(H)/K$  est abélienne donc galoisienne, de groupe de Galois  $\mathcal{G}_{\ell}$ . Si  $x \in H$  et  $\sigma \in \mathcal{G}_{\ell}$ , alors  $\sigma(x)$  est défini sur  $K(H)$ . Donc le groupe  $H_{\mathcal{G}_{\ell}} := \mathcal{G}_{\ell} \cdot H$  engendré par les  $\sigma(x)$  est défini sur  $K(H)$  et contient  $H$ , donc  $K(H) = K(H_{\mathcal{G}_{\ell}})$ . Ainsi l'inégalité

$$|H_{\mathcal{G}_{\ell}}| \ll [K(H_{\mathcal{G}_{\ell}}) : K]^{\star}$$

entraîne l'inégalité

$$|H| \ll [K(H) : K]^{\star}.$$

Ainsi dans le cas CM nous pourrions toujours supposer que le groupe  $H$  est Galoisien.

## 5 Préliminaires galoisiens

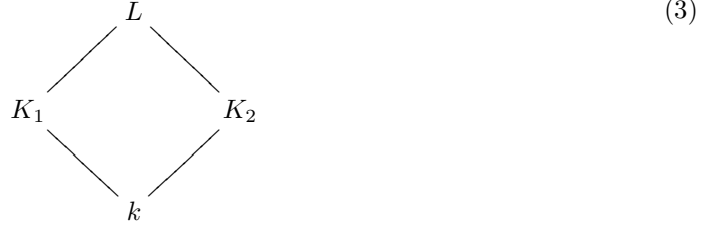
Résumons ici les arguments galoisiens que nous allons utiliser de manière répétée.

**Lemme 5.1** *Soit  $K/k$  une extension galoisienne,  $F/k$  une extension quelconque, alors  $KF/F$  est galoisienne et la restriction au corps  $K$  induit un isomorphisme de  $\text{Gal}(KF/F)$  sur  $\text{Gal}(K/F \cap K)$ .*

*Démonstration* : Voir Lang, *Algebra*, [6] [Ch. VIII, §1, Theorem 4]  $\square$

Remarquons que, si  $k = K \cap F$  on obtient  $[KF : K] = [F : k]$  et, par conséquent,  $[K : F] = [K : k]$ .

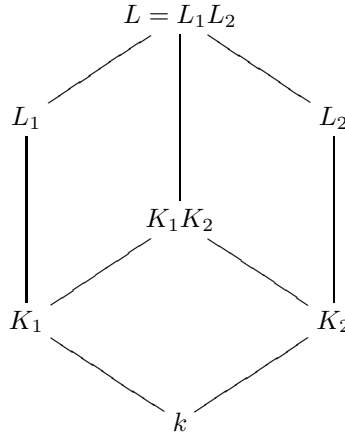
**Définition 5.2** Nous dirons que les corps  $k$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $L$  forment un *parallélogramme* si  $L$  est le compositum de  $K_1$  et  $K_2$  et si  $[L : k] = [K_1 : k][K_2 : k]$  (cette dernière condition équivaut à  $[L : K_1] = [K_2 : k]$  ou encore  $[L : K_2] = [K_1 : k]$ ).



On voit aisément que si  $L = K_1 K_2$ , une condition nécessaire pour qu'on ait un parallélogramme est que  $k = K_1 \cap K_2$ . Le lemme 5.1 indique que, si l'une des deux extensions  $K_1/k$  ou  $K_2/k$  est galoisienne cette condition est aussi suffisante. On peut compléter cette discussion avec le lemme suivant.

**Lemme 5.3** *Supposons que  $k$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L = L_1 L_2$  forment un parallélogramme. Soit  $k \subset K_1 \subset L_1$  et  $k \subset K_2 \subset L_2$ , alors  $k$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K = K_1 K_2$  forment un parallélogramme.*

*Démonstration :* La situation est résumée dans le diagramme suivant :



Le fait que  $[L : L_2] = [L_1 : k]$  (et symétriquement  $[L : L_1] = [L_2 : k]$ ) permet d'écrire

$$[L_1 L_2 : K_1 K_2] = [L_1 L_2 : L_1 K_2][L_1 K_2 : K_1 K_2] \leq [L_2 : K_2][L_1 : K_1].$$

Si l'on pose  $c := [K_1 : k][K_2 : k]/[K_1 K_2 : k]$  (qui est  $\geq 1$ ) on a :

$$[L_1 L_2 : k] = [L_1 L_2 : K_1 K_2][K_1 K_2 : k] \leq [L_2 : K_2][L_1 : K_1][K_1 : k][K_2 : k]/c = [L_1 : k][L_2 : k]/c$$

On en tire donc  $c = 1$  et la conclusion voulue.  $\square$

Remarquons que ce lemme permet de définir les parallélogrammes infinis : les corps  $k$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et le compositum  $L = L_1 L_2$  forment un parallélogramme (avec  $L_i/k$  éventuellement infinie) si pour toutes  $K_i$ , sous-extensions finies sur  $k$ , les extensions  $k$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K = K_1 K_2$  forment un parallélogramme.

## 6 Sous-extensions de $K(A[\ell^\infty])/K$

### 6.1 Produit de variétés abéliennes

**Convention.** *Nous utiliserons dans ce paragraphe la convention suivante : on écrira  $[L : K] = [F : K]$  au lieu de  $c_1^{-1}[F : k] \leq [L : K] \leq c_1[F : k]$  et de même on s'autorisera à écrire  $L = K$  si*

on a  $\max\{[L : L \cap K], [K : L \cap K]\} \leq c_1$ . (La constante  $c_1$  ne dépendant évidemment que de la variété abélienne  $A$  et du corps de base  $K$ .)

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux variétés abéliennes définies sur  $K$ . Considérons  $A = A_1 \times A_2$  et faisons les deux hypothèses suivantes :

1.  $\text{Hdg}(A) \simeq \text{Hdg}A_1 \times \text{Hdg}A_2$ .
2.  $A = A_1 \times A_2$  vérifie la conjecture de Mumford-Tate forte (conjecture 2.2).

**Remarque 6.1** Notons que les deux conditions précédentes, bien que placées sur le même plan, n'ont en fait pas du tout le même statut : on s'attend à ce que la condition 2. soit toujours vérifiée. Il n'en est pas de même pour la condition 1. dont on sait au contraire qu'elle peut être mise en défaut (comme indiqué au paragraphe 2, cf. par exemple [10] paragraphes 3 et 5.3). Nous avons indiqué dans la proposition 2.13 du paragraphe 2 certains résultats connus concernant cette condition 1.

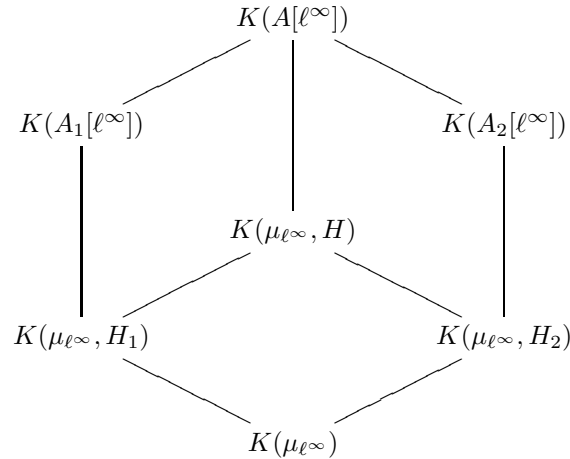
**Proposition 6.2** Si  $A = A_1 \times A_2$  vérifie les conditions 1. et 2. précédentes, alors

$$\text{Gal}(K(A[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \cong \text{Gal}(K(A_1[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \times \text{Gal}(K(A_2[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \quad (4)$$

(où  $\cong$  signifie isomorphe à indice fini près).

*Démonstration* : Immédiat. □

Considérons maintenant un sous-groupe  $H = H_1 \times H_2 \subset A[\ell^\infty]$ , avec  $H_1$  et  $H_2$  finis. On dispose du diagramme suivant d'extensions.



On peut utiliser le même diagramme en un cran fini en remplaçant  $\ell^\infty$  par  $\ell^N$  avec  $N$  suffisamment grand pour que  $H \subset A[\ell^N]$ . La proposition 6.2 peut se traduire en disant que le diagramme ci-dessus fournit un parallélogramme infini.

**Définition 6.3** Soit  $A$  une variété abélienne sur un corps de nombres  $K$ . Nous dirons que  $A$  vérifie la propriété  $\mu$  si, pour tout premier  $\ell$  et pour tout sous-groupe fini  $H$  de  $A[\ell^\infty]$ , il existe un entier  $m$  tel que, à indice fini borné (indépendamment de  $\ell$ ) près :

$$K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^m}). \quad (5)$$

**Remarque 6.4** Pour les calculs combinatoires ultérieurs nécessaires dans le calcul de  $\gamma(A)$  pour  $A = \prod_{i=1}^r A_i^{n_i}$ , il est de plus important de savoir déterminer l'exposant  $m$  associé à un groupe fini  $H$  donné.

**Proposition 6.5** Soit  $A = A_1 \times A_2$  vérifiant la conclusion de la proposition 6.2. Soit  $H = H_1 \times H_2$  comme précédemment. Supposons de plus que  $A_1$  et  $A_2$  vérifient la propriété  $\mu$  avec un exposant  $m_i$  associé au sous-groupe  $H_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Posons  $K_1 = K(H_1) \cap K(H_2)$ , on a

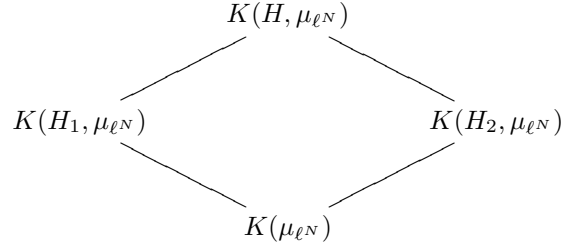
$$[K(H) : K_1] = [K(H_1) : K_1][K(H_2) : K_1]. \quad (6)$$

Autrement dit  $K_1$ ,  $K(H_1)$ ,  $K(H_2)$  et  $K(H)$  forment un parallélogramme. De plus, si on note  $m := \max(m_1, m_2)$ , on a l'égalité :

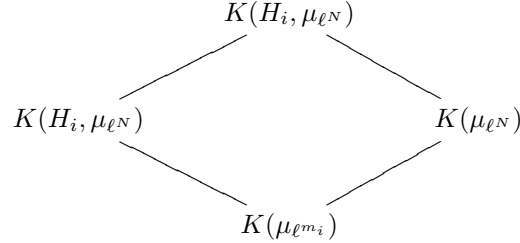
$$K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^m}), \quad (7)$$

autrement dit  $A$  vérifie la propriété  $\mu$  avec l'exposant  $m$  associé à  $H$ .

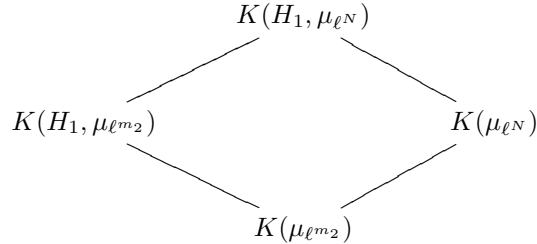
*Démonstration* : Comme nous l'avons dit, on peut traduire la conclusion de la proposition 6.2 (identité (4)) en disant que le diagramme ci-dessous est un parallélogramme (en prenant  $N$  assez grand pour que  $H \subset A[\ell^N]$ ).



Supposons (sans perte de généralité) que  $m_1 \leq m_2$ , alors  $K_1 = K(\mu_{\ell^{m_1}})$ ; en effet  $K(\mu_{\ell^{m_1}})$  est contenu dans  $K(H_1) \cap K(H_2)$  qui doit être contenu dans  $K(\mu_{\ell^\infty})$  et donc dans  $K(H_1) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^{m_1}})$ . De même  $K(H_1, \mu_{\ell^{m_2}}) \cap K(\mu_{\ell^N}) = K(\mu_{\ell^{m_2}})$ . En effet la propriété  $\mu$  appliquée aux  $H_i$  se traduit par le fait que le diagramme ci-dessous est un parallélogramme.

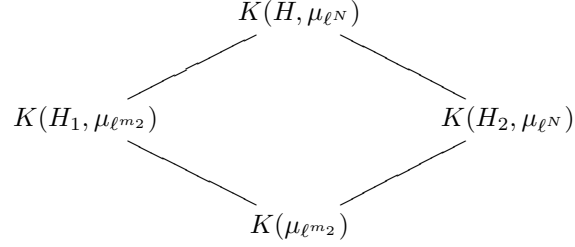


On en tire que le diagramme ci-dessous est un parallélogramme (car c'est un sous-parallélogramme du diagramme précédent pour  $i = 1$ ) :

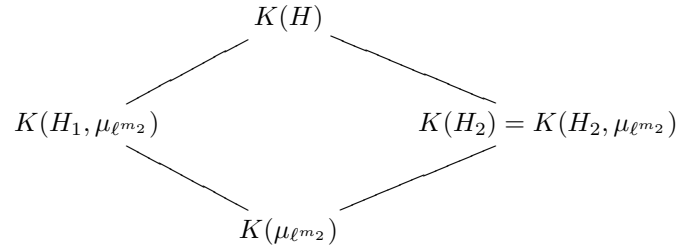


et en particulier  $K(H_1, \mu_{\ell^{m_2}}) \cap K(\mu_{\ell^N}) = K(\mu_{\ell^{m_2}})$ .

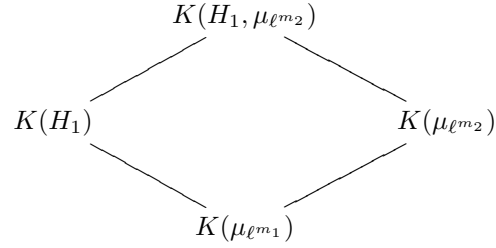
Par conséquent le diagramme ci-dessous est aussi un parallélogramme.



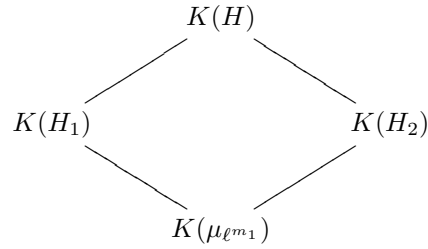
On obtient ainsi un sous-parallélogramme :



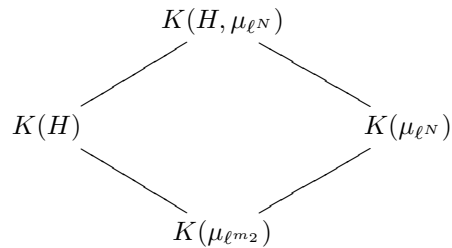
Comme l'extension  $K(\mu_{\ell^{m_2}})/K(\mu_{\ell^{m_1}})$  est galoisienne et comme  $K(H_1) \cap K(\mu_{\ell^{m_2}}) = K(\mu_{\ell^{m_1}})$ , on en tire que le diagramme ci-dessous est un parallélogramme.



D'où l'on tire le parallélogramme recherché :



Considérons maintenant le diagramme :



On peut écrire

$$\begin{aligned} [K(H, \mu_{\ell^N}) : K(\mu_{\ell^N})] &= [K(H_1, \mu_{\ell^N}) : K(\mu_{\ell^N})][K(H_2, \mu_{\ell^N}) : K(\mu_{\ell^N})] \\ &= [K(H_1) : K_1][K(H_2) : K_2] = [K(H) : K_2] \end{aligned}$$

Ainsi le diagramme est un parallélogramme et la deuxième affirmation de la proposition, à savoir,  $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^{m_2}})$  en découle donc.  $\square$

Une induction aisée permet alors de montrer le théorème suivant :

**Théorème 6.6** *Soient  $A_1, \dots, A_r$  des variétés abéliennes définies sur  $K$  et vérifiant la propriété  $\mu$  : pour tout  $i$  et tout groupe fini  $H_i \subset A_i[\ell^\infty]$ , on a*

$$K(H_i) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \cong K(\mu_{\ell^{m_i}}) ;$$

ainsi que l'identité (4) où  $A := A_1 \times \dots \times A_r$  :

$$\text{Gal}(K(A[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \cong \prod_{i=1}^r \text{Gal}(K(A_i[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty}))$$

Alors si  $m := \max m_i$ , tout groupe fini  $H = H_1 \times \dots \times H_r \subset A[\ell^\infty]$  on a  $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \cong K(\mu_{\ell^m})$  et

$$[K(H) : K(\mu_{\ell^m})] \gg \ll \prod_{i=1}^r [K(H_i) : K(\mu_{\ell^{m_i}})].$$

*Démonstration* : Posons  $m' := \max\{m_1, \dots, m_{r-1}\}$ , de sorte que  $m = \max(m', m_r)$ . Notons  $A'_1 = A_1 \times \dots \times A_{r-1}$  et  $A'_2 = A_r$  et enfin  $H'_1 = H_1 \times H_{r-1}$  et  $H'_2 = H_r$ . Par récurrence, on sait que  $K(H'_1) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \cong K(\mu_{\ell^{m'}})$  et que

$$[K(H'_1) : K(\mu_{\ell^{m'}})] \gg \ll \prod_{i=1}^{r-1} [K(H_i) : K(\mu_{\ell^{m_i}})].$$

En appliquant la proposition 6.5 à  $A = A'_1 \times A'_2$  et aux sous-groupes  $H'_1, H'_2$ , on obtient bien que  $[K(H'_1 \times H'_2) : K(\mu_{\ell^m})] \cong K(\mu_{\ell^m})$  et que

$$[K(H'_1 \times H'_2) : K(\mu_{\ell^m})] \gg \ll [K(H'_1) : K(\mu_{\ell^{m'}})][K(H'_2) : K(\mu_{\ell^{m_r}})] \gg \ll \prod_{i=1}^r [K(H_i) : K(\mu_{\ell^{m_i}})].$$

$\square$

Réénonçons la conclusion du théorème sous une forme moins symétrique mais qui est celle que nous utiliserons par la suite.

**Corollaire 6.7** *Avec les notations et hypothèses du théorème précédent, et en notant quitte à réindexer,  $m_r := \max_{1 \leq i \leq r} m_i$ , et on a*

$$[K(H) : K] \gg \ll \prod_{i=1}^r [K(H_i) : K] \prod_{i=1}^{r-1} [K(\mu_{\ell^{m_i}}) : K]^{-1}.$$

## 6.2 La propriété $\mu$ pour les variétés abéliennes et $H = A[\ell^n]$

L'existence de l'accouplement de Weil implique que, pour toute variété abélienne  $A$  définie sur  $K$ , on  $\mu_N \subset K(A[N])$  et en particulier  $K(\mu_{\ell^m}) \subset K(A[\ell^m]) \cap K(\mu_{\ell^\infty})$ ; le but de ce paragraphe est de montrer que l'on a en fait égalité, à indice fini près.

**Proposition 6.8** *Soient  $A$  une variété abélienne définie sur  $K$ , il existe  $c_A$  telle que :*

$$\forall \ell \text{ premier}, \forall m \in \mathbb{N}, [K(A[\ell^m]) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) : K(\mu_{\ell^m})] \leq c_A$$

*Démonstration :* Reprenons la représentation galoisienne  $\rho_\ell : \text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  et notons pour abrégé  $G = G_\ell$  l'image, qui est un sous-groupe fermé de  $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  et même, en tenant compte d'une polarisation du groupe des similitudes symplectiques  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ . Ce dernier groupe est muni d'un homomorphisme canonique  $\mu : \text{GSp}_{2g} \rightarrow \mathbb{G}_m$  (défini par  $\mu(\sigma)e \cdot e' = \sigma(e) \cdot \sigma(e')$ ). On sait que  $\mu \circ \rho_\ell$  est le caractère cyclotomique  $\chi_\ell : \text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times$  dont le noyau correspond à l'extension  $K(\mu_{\ell^\infty})$ . Notons  $C$  le centre de  $\text{GL}_{2g}$ , i.e. le sous-groupe des homothéties. D'après [1], le groupe  $G$  contient un sous-groupe d'indice fini dans  $C(\mathbb{Z}_\ell)$  et, d'après [26] cet indice est même borné indépendamment de  $\ell$ . On a donc

$$(C(\mathbb{Z}_\ell) : G \cap C(\mathbb{Z}_\ell)) \leq c_A.$$

Introduisons les trois sous-groupes  $\text{SLG} := G \cap \text{SL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ , et, pour tout entier  $m \geq 1$ ,

$$H_{\ell^m} := \text{Ker} \left\{ \mu \bmod \ell^m : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z})^\times \right\}.$$

et

$$G_{\ell^m} := \text{Ker} \left\{ \text{réd} \bmod \ell^m : G \longrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \right\}.$$

L'extension de  $K$  correspondant à  $H_{\ell^m}$  est  $K(\mu_{\ell^m})$  et celle correspondant à  $G_{\ell^m}$  est  $K(A[\ell^m])$ . L'énoncé de la proposition se traduit alors en l'égalité, à indice fini borné indépendamment de  $\ell$  et  $m$  :

$$H_{\ell^m} \simeq \langle G_{\ell^m}, \text{SLG} \rangle.$$

Considérons l'isogénie de groupes algébriques donnée par le produit, :

$$\psi : C \times \text{SL}_{2g} \rightarrow \text{GL}_{2g}.$$

D'après le résultat de Bogomolov complété par Serre rappelé ci-dessus,  $\psi$  induit un quasi-isomorphisme (noyau et conoyau fini borné indépendamment de  $\ell$ ) entre  $C(\mathbb{Z}_\ell) \times \text{SLG}$  et  $G$ . On trouve

$$\psi^{-1}(G_{\ell^m}) = \{(\lambda, h) \in \mathbb{Z}_\ell^\times \times G \mid \lambda h \equiv \text{Id} \bmod \ell^m\}$$

$$\psi^{-1}(\text{SLG}) = \{(\lambda, h) \in \mathbb{Z}_\ell^\times \times G \mid \lambda^{2g} = 1\}$$

$$\psi^{-1}(H_{\ell^m}) = \{(\lambda, h) \in \mathbb{Z}_\ell^\times \times G \mid \lambda^{2g} \equiv 1 \bmod \ell^m\}$$

et il est clair que le dernier groupe est égal au produit des deux précédents, ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 7 Preuve du théorème 1.6

Soit  $A = \prod_{i=1}^n E_i^{n_i}$  un produit de courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  deux à deux non-isogènes. Nous allons prouver le théorème 1.6 annoncé dans l'introduction, à savoir :

$$\gamma(A) = \alpha(A).$$

Rappelons que par ce qui précède, il suffit de montrer que

$$|H| \ll [K(H) : K]^{\alpha(A)}$$

pour  $H \subset A[\ell^\infty]$  de la forme  $\prod_{i=1}^n H_i^{n_i}$  avec  $H_i \subset E_i[\ell^\infty]$ ; et ce pour tout premier  $\ell$ .

Nous fixons dans la suite un nombre premier  $\ell$ .

## 7.1 La propriété $\mu$ pour les courbes elliptiques

Soit  $E/K$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$ . Soit  $H \subset E[\ell^\infty]$  un sous-groupe fini du groupe des points de  $\ell^\infty$ -torsion de  $E$  sur  $\overline{K}$ . Le groupe  $H$  est isomorphe au produit  $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$  avec  $0 \leq m \leq n$ .

**Proposition 7.1** *La courbe elliptique  $E$  vérifie la propriété  $\mu$ . Précisément, avec les notations précédentes, on a*

$$[K(\mu_{\ell^\infty}) \cap K(H) : K(\mu_{\ell^m})] = O(1).$$

et en particulier :

$$[K(\mu_{\ell^\infty}) \cap K(H) : K] \gg \ll \ell^m.$$

Notons déjà que la deuxième formule découle de la première car pour tout entier  $r \geq 0$ , l'extension  $K(\mu_{\ell^r})/K$  est abélienne de degré  $\phi(\ell^r) \gg \ll \ell^r$ . Commençons par introduire une définition dans le cas CM.

**Définition 7.2** Soit  $E/K$  une courbe elliptique à multiplication complexe, et soit  $\ell$  un nombre premier. Notons  $K_0$  le corps quadratique imaginaire de multiplication complexe. Nous dirons que  $E/K$  est *déployée en  $\ell$*  si le tore de Mumford-Tate  $\text{MT}(E)$  (qui n'est, dans ce cas, autre que  $\text{Res}_{K_0/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{m,K_0})$  restriction des scalaires de  $K_0$  à  $\mathbb{Q}$ ) est tel que  $\text{MT}(E) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$  est isomorphe au produit  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}_\ell}^2$ . Dans le cas contraire nous dirons que  $E/K$  n'est pas *déployée en  $\ell$* .

Dans le cas sans multiplication complexe (et dans le cas CM déployé) la preuve de la proposition 7.1 repose sur un petit lemme de groupes. Le cas CM non-déployé se traite différemment. Commençons donc par ce dernier cas :

**Preuve de la proposition 7.1 dans le cas CM non-déployé :** On suppose ici que la courbe elliptique  $E$  est de type CM et non-déployée en  $\ell$ , au sens de la définition 7.1. Dans ce cas la représentation naturelle  $\rho_{\mathbb{Q}_\ell} : \text{MT}(E)(\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \text{Aut}(V_\ell)$  est irréductible. Le paragraphe 7.1 (proposition 7.4) de [18] nous indique alors que  $E[\ell^m]$  est inclus dans  $H$  et d'indice fini  $c_0$  (ne dépendant que de  $E/K$  et pas de  $H, \ell, m$ ) dans  $H$ . On a donc la série d'inclusions

$$K \subset K(\mu_{\ell^m}) = K(E[\ell^m]) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \subset K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \subset K(E[c_0\ell^m]) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^m})$$

La première égalité ainsi que la dernière étant des égalités à indice fini près, au sens de la convention du paragraphe 6. Elles découlent du paragraphe 6.2 indiquant précisément que la propriété  $\mu$  est valable pour  $H = A[\ell^m]$  pour toute variété abélienne  $A/K$  et déterminant l'exposant  $m$  correspondant.  $\square$

Passons au cas des courbes elliptiques sans multiplication complexe. Définissons les sous-groupes suivants de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ .

$$G_{m,n} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-1 \equiv c \equiv 0 \pmod{\ell^m}, b \equiv d-1 \equiv 0 \pmod{\ell^n} \right\}$$

$$\Gamma := \text{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \text{ et } \Gamma_m := \{U \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid \det(U) \equiv 1 \pmod{\ell^m}\}.$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 7.3** *Si  $m \leq n$ , on a l'égalité  $G_{m,n} \cdot \Gamma = \Gamma_m$ .*

*Démonstration :* Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$  telle que  $\det(M) = ad - bc = 1 \pmod{\ell^m}$ . La matrice  $\begin{pmatrix} \det(M)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M$  est dans  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ .  $\square$



**Preuve de la proposition 7.1 dans le cas sans multiplication complexe :** C'est une conséquence du lemme précédent et des résultats connus sur les groupes de Galois des points de  $\ell^\infty$ -torsion des courbes elliptiques sans multiplication complexe. Notons

$$G_1 = \text{Gal}(K(E[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \text{ et } G_H = \text{Gal}(K(E[\ell^\infty])/K(H)).$$

Commençons par rappeler un résultat de Serre sur la conjecture de Mumford-Tate. Notons  $G_\ell := \rho_\ell(G_K)$  l'image du groupe de Galois  $G_K$  par la représentation  $\ell$ -adique  $\rho_\ell : G_K \rightarrow \text{Aut}(T_\ell(E))$  donnée par l'action de Galois sur les points de  $E[\ell^\infty]$ . La courbe  $E/K$  étant sans multiplication complexe, on sait (d'après le théorème 3 et son corollaire 1 de [21] p. 299–300) que pour presque tout premier  $\ell$ , on a

$$G_\ell = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell).$$

Ainsi au vu de ce que l'on veut montrer, on peut supposer que  $G_\ell = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ . Le groupe  $H$  est de la forme

$$H = \langle P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, le groupe de Galois associé,  $G_H$ , tel que  $[G_\ell : G_H] = [K(H) : K]$  est défini par

$$G_H = \{\sigma \in G_\ell \mid \sigma_H = \text{Id}_H\}.$$

On se donne une base de  $T_\ell(E)$ ,  $\{\widehat{P}_1, \widehat{P}_2\}$  telle que  $P_1 = \widehat{P}_1 \pmod{\ell^m}$  et  $P_2 = \widehat{P}_2 \pmod{\ell^n}$ . On a ainsi l'identification

$$G_H = \left\{ \sigma \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid \sigma \widehat{P}_1 = \widehat{P}_1 \pmod{\ell^m}, \text{ et } \sigma \widehat{P}_2 = \widehat{P}_2 \pmod{\ell^n} \right\}.$$

On peut encore réécrire ceci sous la forme

$$G_H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid a - 1 = c = 0 \pmod{\ell^m} \text{ et } b = d - 1 = 0 \pmod{\ell^n} \right\} = G_{m,n}.$$

Par ailleurs, comme le groupe de Mumford-Tate vérifie  $\text{MT}(E) = \mathbb{G}_m \cdot \text{Hdg}(E)$ , on a :  $G_1 \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ , et cette inclusion est de plus de conoyau de cardinal majoré indépendamment de  $\ell$  (il s'agit du corollaire 2 p. 300 de [21]). Notons  $K_1 = K(\mu_{\ell^\infty})$ ,  $K_2 = K(H)$  et  $L = K(E[\ell^\infty])$ . L'extension  $L/K$  est galoisienne, donc les extensions  $L/K_i$  aussi, de groupe de Galois  $G_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Ainsi on a

$$\text{Gal}(L/K_1 \cap K_2) = G_1 \cdot G_H \subset \Gamma_m := \{M \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid \det M = 1 \pmod{\ell^m}\}.$$

Le lemme 7.3 précédent nous assure que cette inclusion est de conoyau fini borné indépendamment de  $\ell$ . On en déduit que  $[K_1 \cap K_2 : K(\mu_{\ell^m})]$  est borné indépendamment de  $\ell$ . Ceci conclut la preuve dans ce cas.  $\square$

**Preuve de la proposition 7.1 dans le cas CM déployé :** il nous reste à traiter le cas où  $E$  a multiplication complexe et où  $\ell$  est tel que le groupe de Mumford-Tate est déployé sur  $\mathbb{Q}_\ell$ , donc isomorphe à  $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}_\ell}^2$ . Dans ce cas, le théorème 2.9 indique que  $G_\ell$  est ouvert, d'indice fini dans  $\mathbb{Z}_\ell^\times \times \mathbb{Z}_\ell^\times$  plongé diagonalement dans  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ . Le groupe  $G_H$  est donc (à indice fini près) le groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid a = 1 \pmod{\ell^m} \text{ et } d = 1 \pmod{\ell^n} \right\}.$$

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a  $G_1 \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid a \in \mathbb{Z}_\ell^\times \right\}$ , et cette inclusion est de conoyau de cardinal majoré indépendamment de  $\ell$ . De plus,

$$\text{Gal}(L/K_1 \cap K_2) = G_1 \cdot G_H \subset \Gamma_m := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \mid ad = 1 \pmod{\ell^m} \right\}.$$

L'équivalent du lemme de groupes précédent est ici le suivant : si  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  est telle que  $ad = 1 \pmod{\ell^m}$ , alors en la multipliant par la matrice  $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  on obtient la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix}$  avec  $ad = 1 \pmod{\ell^m}$ . Ceci montre que  $[K(\mu_{\ell^\infty}) \cap K(H) : K(\mu_{\ell^m})]$  est borné indépendamment de  $\ell$ .

Ceci conclut la preuve.  $\square$

## 7.2 Combinatoire

Revenons à notre situation initiale : soit  $A = \prod_{i=1}^n E_i^{n_i}$  produit de courbes elliptiques, les  $E_i$  étant deux à deux non-isogènes, et soit pour tout  $i$  des sous-groupes  $H_i \subset E_i[\ell^\infty]$  finis. Rappelons que par le théorème 2.10 et le lemme 2.4, on sait que  $A_{\text{red}} := \prod_{i=1}^n E_i$  vérifie les hypothèses de la proposition 6.2. Donc  $A_{\text{red}}$  et  $A$  vérifient également la conclusion de la proposition 6.2. De plus par la proposition 7.1, chacune des  $E_i$  vérifie la propriété  $\mu$ . Finalement ceci prouve que la variété abélienne  $A$  est justiciable du corollaire 6.7 que nous utiliserons librement dans la suite.

Il conviendra de distinguer selon que la courbe elliptique  $E_i$  est ou non de type CM. Quitte à renuméroter les  $E_i$ , on peut écrire  $A$  sous la forme

$$A = B \times C \quad \text{avec} \quad B = \prod_{i=1}^m B_i^{v_i} \quad \text{et} \quad C = \prod_{i=1}^n C_i^{u_i}.$$

Les  $B_i$  sont des courbes elliptiques avec multiplication complexe et les  $C_i$  sont des courbes elliptiques sans multiplication complexe. Ces courbes sont deux à deux non-isogènes. Les  $u_i$  et  $v_i$  sont dans  $\mathbb{N} - \{0\}$  et  $n$  et  $m$  sont des entiers positifs ou nuls. On se donne un groupe  $H \subset A[\ell^\infty]$  de la forme

$$H = H_B \times H_C, \quad \text{où} \quad H_B = \prod_{i=1}^m H_{B,i}^{v_i}, \quad \text{et} \quad \text{où} \quad H_C = \prod_{i=1}^n H_{C,i}^{u_i}$$

avec, quitte à renuméroter,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad H_{C,i} \simeq \mathbb{Z}/\ell^{c_i}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell^{c_i+n}\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 0 \leq c_i \leq c_{i+n} \quad \text{et} \quad c_1 \leq \dots \leq c_n,$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad H_{B,i} \simeq \mathbb{Z}/\ell^{b_i}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell^{b_i+m}\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 0 \leq b_i \leq b_{i+n} \quad \text{et} \quad b_1 \leq \dots \leq b_m.$$

En notant  $\log_\ell$  le logarithme en base  $\ell$ , on a donc

$$\log_\ell |H| = \sum_{i=1}^n (c_i + c_{i+n})u_i + \sum_{i=1}^m (b_i + b_{i+m})v_i. \quad (8)$$

Par ailleurs la proposition 7.1 dit alors que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  (resp. tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ), on a  $K(H_{B,i}) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^{b_i}})$  à indice fini près (resp.  $K(H_{C,j}) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^{c_j}})$ ) et on a donc des quasi-égalités du type :

$$[K(H_{B,i}) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) : K] \gg \ll [K(\mu_{\ell^{b_i}}) : K] \gg \ll \ell^{b_i}.$$

Introduisons de plus la notation

$$\beta = \min\{c_n, b_m\} \quad \text{si } m \text{ et } n \text{ sont non nuls, et} \quad \beta = 0 \text{ si } m \text{ ou } n \text{ est nul.}$$

En appliquant le corollaire 6.7 nous obtenons ainsi

$$[K(H) : K] \gg \ll \left( \prod_{i=1}^m [K(H_{B,i}) : K] \prod_{j=1}^n [K(H_{C,j}) : K] \right) \ell^{-\sum_{i=1}^{m-1} b_i - \sum_{j=1}^{n-1} c_j - \beta}. \quad (9)$$

Par ailleurs, en utilisant les résultats de [18] pour les courbes elliptiques sans CM et pour les courbes elliptiques avec CM, on a :

1. pour tout  $i$ ,  $\log_\ell[K(H_{C,i}) : K] \geq 2(c_i + c_{i+n}) + O(1)$ .
2. pour tout  $i$ ,  $\log_\ell[K(H_{B,i}) : K] \geq b_i + b_{i+n} + O(1)$  (dans [18] ceci est prouvé si  $H_{B,i}$  est galoisien mais on a vu dans la réduction du paragraphe 4.3 que ceci entraîne l'inégalité dans le cas général).

En utilisant ceci, ainsi que l'encadrement (9) on obtient

$$\begin{aligned}
\log_\ell([K(H) : K]) &= \sum_{i=1}^n \log_\ell[K(H_{C,i}) : K] + \sum_{i=1}^m \log_\ell[K(H_{B,i}) : K] - \sum_{i=1}^{n-1} c_i - \sum_{i=1}^{m-1} b_i - \beta + O(1) \\
&\geq 2 \sum_{i=1}^n (c_i + c_{i+n}) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i + \sum_{i=1}^m (b_i + b_{i+m}) - \sum_{i=1}^{m-1} b_i - \beta + O(1) \\
&\geq c_n + \sum_{i=1}^n c_i + 2 \sum_{i=1}^n c_{i+n} + \sum_{i=1}^m b_{i+m} + b_m - \beta + O(1).
\end{aligned}$$

Introduisons la notation

$$m(A) := \max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (c_i + c_{i+n}) u_i + \sum_{i=1}^m (b_i + b_{i+m}) v_i}{c_n + \sum_{i=1}^n c_i + 2 \sum_{i=1}^n c_{i+n} + \sum_{i=1}^m b_{i+m} + b_m - \beta} \right\},$$

le max portant sur les conditions  $0 \leq b_i \leq b_{i+m}$ ,  $0 \leq c_i \leq c_{i+n}$ ,  $b_1 \leq \dots \leq b_m$ ,  $c_1 \leq \dots \leq c_n$ .

Finalement la preuve du théorème 1.6 se ramène à la proposition combinatoire suivante :

**Proposition 7.4**  $\alpha(A) \geq m(A)$ .

*Démonstration* : Nous allons distinguer 3 cas, selon que  $n = 0$  ou  $m = 0$  ou  $n, m \geq 1$ .

1. Commençons par le cas où l'on suppose  $m = 0$ , i.e.  $A$  est un produit de courbes elliptiques sans CM (et donc  $\beta = 0$ ). On a

$$\alpha(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \frac{2 \sum_{i \in I} c_i}{\dim \text{MT} \left( \prod_{i \in I} E_i^{u_i} \right)}.$$

Or par les rappels sur le groupe de Mumford-Tate (lemmes 2.2 et 2.4), on a

$$\dim \text{MT} \left( \prod_{i \in I} E_i^{u_i} \right) = \dim \text{MT} \left( \prod_{i \in I} E_i \right) = 1 + \dim \text{Hdg} \left( \prod_{i \in I} E_i \right) = 1 + \sum_{i \in I} \dim \text{Hdg}(E_i) = 1 + 3|I|.$$

(La dernière égalité vient de ce que  $\text{MT}(A) = \text{GL}_2$  dans le cas sans multiplication complexe, donc  $\dim \text{Hdg}(A) = 3$ ). Finalement on a

$$\alpha(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \frac{2 \sum_{i \in I} u_i}{1 + 3|I|} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{u_i}{2}. \quad (10)$$

Nous pouvons maintenant passer à la preuve de l'inégalité  $\alpha(A) \geq m(A)$  proprement dite. Celle-ci est équivalente à montrer que

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i(u_i - \alpha(A)) \leq c_n(2\alpha(A) - u_n) + \sum_{i=1}^n c_{i+n}(2\alpha(A) - u_i). \quad (11)$$

Or on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i(u_i - \alpha(A)) \leq \sum_{i \in I} c_i(u_i - \alpha(A)) \quad \text{avec } I = \{i \leq n-1 \mid u_i - \alpha(A) \geq 0\}.$$

De plus, comme  $2\alpha(A) - u_i \geq 0$  et  $c_{i+n} \geq c_i$ , on a

$$\begin{aligned} c_n(2\alpha(A) - u_n) + \sum_{i=1}^n c_{i+n}(2\alpha(A) - u_i) &\geq c_n(4\alpha(A) - 2u_n) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(2\alpha(A) - u_i) \\ &\geq c_n(4\alpha(A) - 2u_n) + \sum_{i \in I} c_i(2\alpha(A) - u_i). \end{aligned}$$

Donc pour prouver (11), il suffit de montrer que

$$\sum_{i \in I} c_i(u_i - \alpha(A)) \leq c_n(4\alpha(A) - 2u_n) + \sum_{i \in I} c_i(2\alpha(A) - u_i),$$

autrement dit que

$$\sum_{i \in I} c_i(2u_i - 3\alpha(A)) \leq c_n(4\alpha(A) - 2u_n).$$

Mais on a également

$$\sum_{i \in I} c_i(2u_i - 3\alpha(A)) \leq \sum_{i \in I'} c_i(2u_i - 3\alpha(A)) \quad \text{où } I' = \{i \in I \mid 2u_i - 3\alpha(A) > 0\}.$$

Ainsi il suffit, pour prouver (11), de montrer que

$$\sum_{i \in I'} c_i(2u_i - 3\alpha(A)) \leq c_n(4\alpha(A) - 2u_n).$$

Mais  $\sum_{i \in I'} c_i(2u_i - 3\alpha(A)) \leq \sum_{i \in I'} c_n(2u_i - 3\alpha(A))$ , donc il nous reste à montrer que

$$2 \sum_{i \in I' \cup \{n\}} u_i \leq 4\alpha(A) + 3|I'|\alpha(A) = (3|I' \cup \{n\}| + 1)\alpha(A).$$

Ceci est vrai comme le montre (10) avec l'ensemble  $I' \cup \{n\}$ .

2. Supposons maintenant que  $n = 0$ , *i.e.* que  $A$  est un produit de courbes elliptiques ayant multiplication complexe (et donc avec  $\beta = 0$ ). On a

$$\alpha(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, m\}} \frac{2 \sum_{i \in I} b_i}{\dim \text{MT} \left( \prod_{i \in I} E_i^{v_i} \right)}.$$

Le même calcul qu'à l'étape 1. (en utilisant que pour une courbe elliptique CM, le groupe  $\text{MT}(E)$  est de dimension 2) donne cette fois

$$\alpha(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, m\}} \frac{2 \sum_{i \in I} v_i}{1 + |I|} \geq \max_{1 \leq i \leq m} v_i. \quad (12)$$

Nous pouvons maintenant passer à la preuve de l'inégalité  $\alpha(A) \geq m(A)$  proprement dite. Celle-ci est équivalente à montrer que

$$\sum_{i=1}^m (b_i + b_{i+m})v_i \leq \alpha(A)b_m + \alpha(A) \sum_{i=1}^m b_{i+m}$$

autrement dit à

$$\sum_{i=1}^m b_i v_i \leq \alpha(A)b_m + \sum_{i=1}^m b_{i+m}(\alpha(A) - v_i). \quad (13)$$

Comme  $b_{i+m} \geq b_i$  et comme  $\alpha(A) - v_i \geq 0$  on a  $\sum_{i=1}^m b_{i+m}(\alpha(A) - v_i) \geq \sum_{i=1}^m b_i(\alpha(A) - v_i)$ , donc pour prouver (13), il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i(2v_i - \alpha(A)) \leq 2(\alpha(A) - v_m)b_m.$$

En introduisant comme auparavant l'ensemble  $I = \{i \leq m-1 \mid 2v_i - \alpha(A) \geq 0\}$ , et en utilisant que  $b_i \leq b_m$ , on voit qu'il suffit de montrer que

$$2v_m + 2 \sum_{i \in I} v_i \leq \alpha(A) (|I| + 2).$$

En considérant l'ensemble  $I \cup \{m\}$  on constate avec (12) que cette dernière relation est vraie.

3. Il nous reste maintenant le cas où  $m$  et  $n$  sont non-nuls. Là encore c'est le même type de calcul qui va permettre de conclure. Cette fois on a la formule

$$\alpha(A) = \max_{I, J, \emptyset \neq I \cup J} \frac{2 \sum_{i \in I} u_i + 2 \sum_{j \in J} v_j}{3|I| + |J| + 1} \geq \max\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \frac{u_i}{2}; \max_{1 \leq i \leq m} v_i\right\}. \quad (14)$$

L'inégalité à démontrer est la suivante :

$$\sum_{i=1}^n (c_i + c_{i+n}) u_i + \sum_{i=1}^m (b_i + b_{i+m}) v_i \leq \alpha(A) \left[ \sum_{i=1}^n c_i + 2 \sum_{i=1}^n c_{i+n} + \sum_{i=1}^m b_{i+m} + (c_n + b_m - \beta) \right]. \quad (15)$$

Comme précédemment, en utilisant que  $\alpha(A) - v_i \geq 0$  et que  $b_{i+m} \geq b_i$ , on voit qu'il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i + \sum_{i=1}^m b_i v_i \leq \alpha(A) \sum_{i=1}^n c_i + (2\alpha(A) - u_i) \sum_{i=1}^n c_{i+n} + (\alpha(A) - v_i) \sum_{i=1}^m b_i + \alpha(A)(c_n + b_m - \beta).$$

De même, en utilisant que  $2\alpha(A) - u_i \geq 0$  et que  $c_{i+n} \geq c_i$ , il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (2u_i - 3\alpha(A)) c_i + \sum_{j=1}^{m-1} (2v_j - \alpha(A)) b_j \leq c_n(4\alpha(A) - 2u_n) + b_m(2\alpha(A) - 2v_m) - \beta\alpha(A).$$

Introduisons les ensembles  $I' = \{i \leq n-1 \mid 2u_i - 3\alpha(A) \geq 0\}$  et  $J' = \{j \leq m-1 \mid 2v_j - \alpha(A) \geq 0\}$ . Il suffit, pour prouver (15), de montrer que

$$\sum_{i \in I'} (2u_i - 3\alpha(A)) c_n + \sum_{j \in J'} (2v_j - \alpha(A)) b_m \leq c_n(4\alpha(A) - 2u_n) + b_m(2\alpha(A) - 2v_m) - \beta\alpha(A).$$

En posant  $I = I' \cup \{n\}$  et  $J = J' \cup \{m\}$ , ceci revient à prouver que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i \in I} 2u_i \right) c_n + \left( \sum_{j \in J} 2v_j \right) b_m &\leq (4\alpha(A) + 3\alpha(A)|I'|) c_n + (2\alpha(A) + \alpha(A)|J'|) b_m - \alpha(A)\beta \\ &\leq \alpha(A) ((3|I| + 1)c_n + (|J| + 1)b_m - \beta). \end{aligned}$$

Si  $\beta := \min\{b_m, c_n\} = b_m$ , i.e. si  $b_m \leq c_n$ , alors il nous reste à montrer que

$$\left( \sum_{i \in I} 2u_i \right) c_n + \left( \sum_{j \in J} 2v_j \right) b_m \leq \alpha(A) [(3|I| + 1)c_n + |J|b_m].$$

Ceci peut se réécrire sous la forme

$$\left( \sum_{j \in J} 2v_j - |J|\alpha(A) \right) b_m \leq \left( (3|I| + 1)\alpha(A) - 2 \sum_{i \in I} u_i \right) c_n.$$

Comme  $(3|I| + 1)\alpha(A) - \sum_{i \in I} 2u_i \geq 0$  et comme  $b_m \leq c_n$ , on voit qu'il suffit de montrer que

$$\left( \sum_{j \in J} 2v_j - |J|\alpha(A) \right) b_m \leq \left( (3|I| + 1)\alpha(A) - 2 \sum_{i \in I} u_i \right) b_m.$$

ceci est entraîné par

$$2 \sum_{j \in J} v_j + 2 \sum_{i \in I} u_i \leq (|J| + 3|I| + 1)\alpha(A).$$

Or l'inégalité (14) nous dit précisément que ceci est vrai.

Le cas où  $\beta = c_n$  se traite exactement de la même façon. Ceci termine la preuve de la proposition 7.4 et donc du théorème 1.6.  $\square$

## Références

- [1] F. Bogomolov, Sur l'algébricité des représentations  $\ell$ -adiques. C. R. Acad. Sci. Paris 290 (1980), 701–703.
- [2] M. V. Borovoi. The action of the Galois group on the rational cohomology classes of type  $(p, p)$  of abelian varieties. *Mat. Sb. (N.S.)*, 94(136) :649–652, 656, 1974.
- [3] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus et K.-Y. Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [4] T. Ichikawa. Algebraic groups associated with abelian varieties. *Math. Ann.*, 289 :133–142, 1991.
- [5] H. Imai. On the Hodge groups of some abelian varieties. *Kōdai Math. Sem. Rep.* 27 (1976), no. 3, 367–372.
- [6] S. Lang. *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.
- [7] D. Masser. Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986.
- [8] D. Masser. Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height. In *Progr. Math.*, volume 12, pages 213–222. Birkhäuser, 1981.
- [9] J. S. Milne. Abelian varieties. In *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, pages 103–150. Springer, New York, 1986.
- [10] B. J. J. Moonen et Yu. G. Zarhin. Hodge classes on abelian varieties of low dimension. In *Math. Ann.*, 315(4) :711–733, 1999.
- [11] D. Mumford. A note of Shimura's paper “Discontinuous groups and abelian varieties”. *Math. Ann.*, 181 :345–351, 1969.
- [12] D. Mumford. Families of abelian varieties. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965) pp. 347–351 Amer. Math. Soc., 1966.
- [13] K. V. Murty. Algebraic cycles on abelian varieties. *Duke Math. J.* 50 (1983), no. 2, 487–504.
- [14] K. V. Murty. Hodge and Weil classes on abelian varieties. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles* (Banff, AB, 1998), 83–115, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [15] K. V. Murty. Computing the Hodge group of an abelian variety. In *Séminaire de Théorie des Nombres*, Paris 1988–1989, 141–158, Progr. Math., 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [16] R. Pink.  $\ell$ -adic algebraic monodromy groups cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 495 :187–237, 1998.
- [17] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro. Interrelations between the Tate and Hodge hypotheses for abelian varieties. *Mat. Sb. (N.S.)*, 85(127) :610–620, 1971.
- [18] N. Ratazzi. Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes de type CM. À paraître aux *Ann. Sci. ENS*, 2008.
- [19] K. A. Ribet. On  $l$ -adic representations attached to modular forms. *Invent. Math.*, 28 :245–275, 1975.
- [20] K. A. Ribet. Division fields of abelian varieties with complex multiplication. *Mémoires de la S.M.F.*, 2 :75–94, 1980.

- [21] J.-P. Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Inv. Math.*, 15 :259–331, 1972.
- [22] J.-P. Serre. Représentations  $l$ -adiques. In *Algebraic number theory (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976)*, pages 177–193. Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977.
- [23] J.-P. Serre. Deux lettres. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (2) :95–102, 1980/81. Abelian functions and transcendental numbers (Colloq., École Polytech., Palaiseau, 1979).
- [24] J.-P. Serre. *Abelian  $\ell$ -adic representations and elliptic curves*, volume 7 of *Research Notes in Mathematics*, With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998.
- [25] J.-P. Serre. *Résumé des cours au collège de France de 1984-1985, Œuvres. Collected papers. IV.* Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [26] J.-P. Serre. *Résumé des cours au collège de France de 1985-1986, Œuvres. Collected papers. IV.* Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [27] J.-P. Serre. *Lettre à Ken Ribet, Œuvres. Collected papers. IV.* Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [28] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3.* Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305.
- [29] G. Shimura et Y. Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, volume 6 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.
- [30] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 de *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, seconde édition, 1995.

**Adresse :** Hindry Marc,  
 Institut de Mathématiques de Jussieu  
 Université Paris 7 Denis Diderot  
 Case Postale 7012  
 2, place Jussieu  
 F-75251 PARIS CEDEX 05

Ratazzi Nicolas,  
 Université Paris-Sud  
 Département de mathématiques, Bâtiment 425  
 91405 Orsay Cedex  
 FRANCE